

# CAHIERS FRANÇOIS VIÈTE

Série I – N°3

2002

*Varia*

SYLVIANE BIDAL - *Les paradoxes de la relativité*

MICHEL BLAY - *Le souci métaphysique de l'infini dans la construction de la science classique*

PIERRE CASSOU-NOGUES - *Le programme de Gödel et la subjectivité mathématicienne*

MARCEL GRANDIÈRE - *Le débat sur l'éducation en France au XVIII<sup>e</sup> siècle*

MICHEL SPIESSER - *Nobel et les prix Nobel*

Centre François Viète  
Épistémologie, histoire des sciences et des techniques  
Université de Nantes

## SOMMAIRE

- SYLVIANE BIDAL ..... 3  
*Les paradoxes de la relativité*
- MICHEL BLAY ..... 15  
*Le souci métaphysique de l'infini dans la construction de la science classique*
- PIERRE CASSOU-NOGUES..... 31  
*Le programme de Gödel et la subjectivité mathématicienne*
- MARCEL GRANDIÈRE..... 57  
*Le débat sur l'éducation en France au XVIII<sup>e</sup> siècle*
- MICHEL SPIESSER ..... 71  
*Nobel et les prix Nobel*

## LES PARADOXES DE LA RELATIVITÉ\*

Sylviane BIDAL

### Résumé

Par la lecture des principales questions soulevées et les réponses apportées par les deux paradoxes les plus connus issus de la théorie de la relativité, nous nous proposons, dans ce qui suit, de répondre à la question suivante. Le paradoxe des jumeaux et le paradoxe d'Ehrenfest mettent-ils en valeur, comme c'était leur vocation première, une contradiction entre les conséquences immédiates de la théorie de la relativité et le principe de relativité ?

### 1. Les paradoxes et la relativité

Lorsqu'Alphonse Berget rédige un article pour le *Larousse* de 1923 ("Le ciel"), il ne se montre guère convaincu par la théorie de la Relativité, pourtant établie depuis 1905 pour la Relativité restreinte et 1915 pour la théorie généralisée ; il pense qu'elle ne vivra que "l'espace d'un matin". Il résume brièvement un aspect de la théorie qui lui semble complètement absurde :

"Je ne fais que mentionner la "fantaisie" d'un relativiste militant, imaginant un voyageur quittant notre globe dans un véhicule animé d'une vitesse très voisine de celle de la lumière, restant deux ans en route, et, après ces deux ans, revenant sur la Terre, qu'il trouverait vieillie de deux cent ans, tout en n'ayant lui-même vécu que deux années de son existence : c'est du domaine de la plaisanterie.» [LC]

Force nous est de constater que la plaisanterie dure depuis bientôt un siècle, puisque le phénomène décrit, s'il était réalisable, serait tout à fait

---

\* Conférence donnée le 30 octobre 2001 au Centre François Viète.

avéré. Ce phénomène, qui revient à une dilatation du temps, est aujourd'hui admis par les physiciens. Bien sûr, sa formulation sous la forme d'une anecdote étrange – un voyageur enfermé dans un boulet atteindrait une vitesse proche de celle de la lumière – accentue le côté paradoxal du phénomène. C'est justement ce caractère paradoxal qui amène Alphonse Berget – et, avec lui, de nombreux auteurs – à rejeter l'ensemble de la théorie de la relativité, d'autant plus que ce paradoxe, appelé "le voyageur de Langevin" (que l'on retrouve aussi sous les noms de "paradoxe des jumeaux" ou "paradoxe des horloges") n'est qu'un exemple des conséquences extraordinaires de la théorie, un exemple plus spectaculaire, plus connu, fort discuté. C'est surtout par des énoncés de ce type que le grand public et aussi les non spécialistes, savants dans d'autres domaines, ont pris connaissance de la théorie. Tout livre de vulgarisation aborde la théorie de la relativité par ses paradoxes.

Étudier ces paradoxes, c'est donc saisir la Relativité dans ce qu'elle a de plus curieux par rapport à notre expérience quotidienne, par rapport aux notions et aux idées que nous utilisons chaque jour, mais c'est aussi percevoir un aspect historique de la théorie, puisque c'est par les paradoxes que la Relativité s'est présentée comme une théorie inévitablement polémique.

En quoi ces énoncés sont-ils paradoxaux ? Pourquoi ont-ils donné lieu à tant de polémiques ? Est-ce par eux que la Relativité se trouvera – peut-être – reniée ? Voilà des questions qui se trouvent présentes chaque fois que l'on croise un "paradoxe" et que nous allons maintenant rapporter à deux paradoxes fort discutés et présents dès les débuts de la relativité restreinte : "le paradoxe d'Ehrenfest" et "le paradoxe des jumeaux". Chacun d'eux semble, dans un premier temps, mettre en contradiction une conséquence de la théorie avec le principe de relativité.

## **2. Le paradoxe d'Ehrenfest**

Ce que nous nommons ici "paradoxe d'Ehrenfest" est directement lié au phénomène de la contraction des longueurs, que nous allons aborder.

### *2.1. Contraction des longueurs et paradoxe*

La contraction des longueurs est une conséquence immédiate de la théorie de la relativité restreinte.

### 2.1.1. Contraction des longueurs

Selon la Relativité restreinte, une longueur  $l_0$ , mesurée dans un système au repos  $S_0$ , subit une contraction lorsqu'elle est en mouvement par rapport à ce premier système au repos (contraction d'autant plus forte que la vitesse s'approche de celle de la lumière). Si nous appelons  $l$  cette même longueur, mais en mouvement, nous avons

$$l = \sqrt{1-\beta^2} = l_0 \sqrt{1-v^2/c^2} .$$

Ceci signifie qu'un observateur, placé en  $S_0$  (en repos dans  $S_0$ ), verra  $l$  raccourci par rapport à  $l_0$ .

Pour l'instant, nous avons donc l'affirmation qu'une longueur en mouvement subit une contraction dans le sens du mouvement (dans le cas où sa vitesse est proche de celle de la lumière), mais avons-nous pour autant un paradoxe ? Tout ceci est, effectivement, fort surprenant ; ceci nous dérange, nous qui ne constatons aucun phénomène de ce genre dans notre vie quotidienne. Ceci est donc "para doxa", contre l'opinion commune, mais cet aspect extraordinaire, même s'il permet d'attirer l'attention sur le phénomène, ne justifie pas à lui seul tous les développements qu'il a connu.

En effet, un paradoxe n'est pas seulement ce qui est difficile à appréhender, c'est aussi ce qui manifeste une contradiction. En quoi la contraction des longueurs semble-t-elle mettre à jour une contradiction interne à la théorie ?

### 2.1.2. Principe de relativité et contraction des longueurs

Afin de mieux comprendre à quel moment apparaît le paradoxe, nous considérons simplement le même phénomène, mais observé de points de vue différents.

Prenons deux règles  $l_0$  et  $l$ , respectivement fixes dans les systèmes  $S_0$  et  $S$ , ces deux règles glissent l'une sur l'autre avec la vitesse  $v$ . La longueur est, par hypothèse, la même pour les deux règles. Si nous appliquons la loi de contraction des longueurs vue précédemment, chaque système voit la règle mobile plus courte que la règle fixe. Ainsi, un observateur en  $S_0$  verra  $l$  plus courte que  $l_0$  alors qu'un observateur en  $S$  verra  $l_0$  plus courte que  $l$ .

Le problème apparaît lorsqu'on se pose les questions suivantes. Qui effectue la mesure exacte, l'observateur placé en  $S_0$  ou celui placé en  $S$  ? Le raccourcissement est-il réel ou apparent ? Combien mesure, en réalité, la règle ? C'est lorsqu'on veut considérer les deux points de vue en même

temps ou lorsqu'on veut trancher entre les deux perspectives que se pose le problème.

C'est ici que se situe le nœud du problème, car la Relativité nous enseigne justement que nous devons renoncer à vouloir rassembler les points de vue. Nous ne devons pas plus nous étonner de ce phénomène que de celui de la perspective, auquel nous sommes si habitués dans notre quotidien : lorsque nous nous éloignons d'une tour, elle devient plus petite pour nous. C'est un fait que nous ne pouvons nier. En revanche, si quelqu'un est au pied de cette même tour et la mesure, sa dimension ne change pas pour lui. La différence qu'il y a entre notre mesure et celle de l'observateur immobile est la manifestation du mouvement relatif de l'observateur. De même, le raccourcissement de la longueur mesurée en  $S$  (ou  $S_0$ ) est la manifestation du mouvement relatif de l'observateur.

La question de savoir si le raccourcissement est réel ou apparent doit être dépassée : le raccourcissement est à la fois réel (puisqu'effectif) et apparent (puisque relatif à l'observateur).

Le problème est ainsi surmonté.

## 2.2. *Le paradoxe d'Ehrenfest*

Cependant, nous n'échappons pas à de nouvelles difficultés qui ont fait couler beaucoup d'encre. En effet, la nouveauté de cette conception des longueurs va se répercuter sur d'autres questions faisant appel à d'autres propriétés physiques. Nous prendrons, à ce titre, l'exemple de ce que nous appelons "le paradoxe d'Ehrenfest".

### 2.2.1. *Einstein en 1905*

On trouve une première formulation du paradoxe – mais non en termes de paradoxe – dès 1905, dans l'article fondateur de la théorie d'Einstein :

"Un corps rigide qui, lorsqu'il est mesuré à l'état de repos, a la forme d'une sphère, a donc, lorsqu'il est dans un état de mouvement – considéré depuis le système au repos –, la forme d'un ellipsoïde de révolution dont les axes ont pour longueurs :

$$\left( R \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, R, R \right).$$

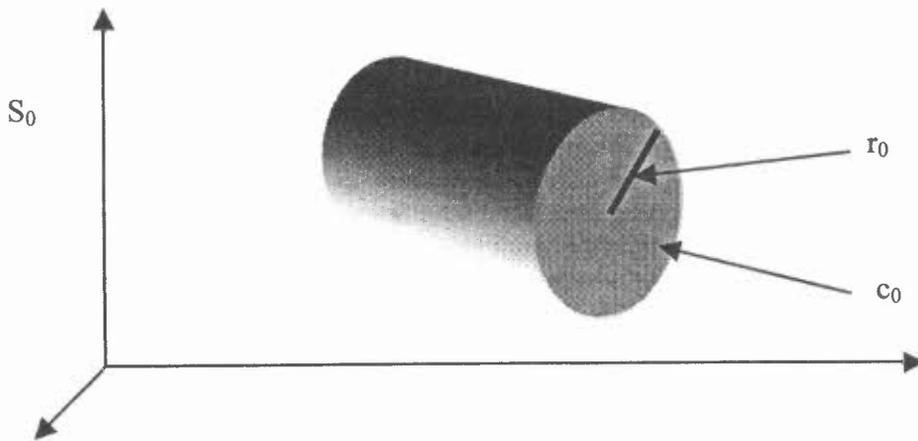
[...] Pour  $v = V$ , tous les objets en mouvement – considérés depuis le système "au repos" – s'aplatissent jusqu'à n'être que des surfaces".  
[E.C.M. p. 43]

Nous avons donc ici une déformation d'un corps dit "rigide", or un corps rigide, non élastique, soumis à de telles conditions, doit céder. Si nous pouvons accepter assez facilement qu'un même objet soit vu d'une manière déformée par un observateur et non par un autre, nous acceptons moins facilement qu'un observateur le voie rompre mais pas l'autre.

### 2.2.2. Formulation en 1909 : le paradoxe d'Ehrenfest

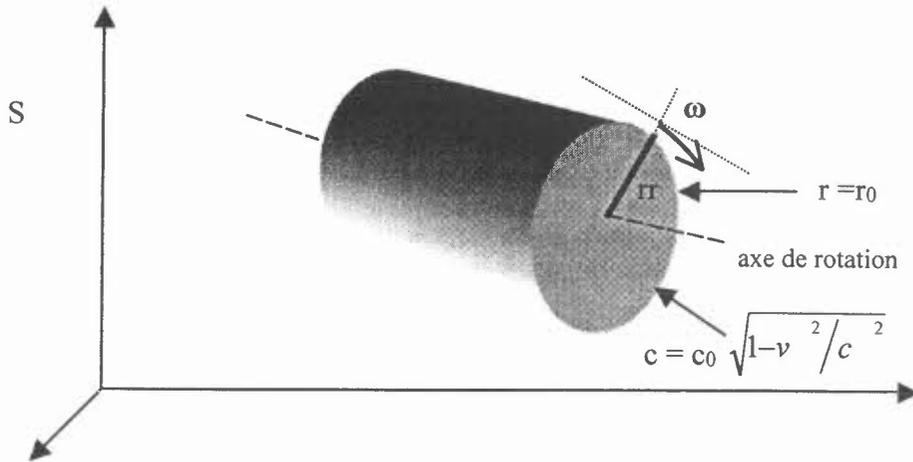
Ce sujet devient un paradoxe à partir de sa formulation par Ehrenfest en 1909.

Prenons le même problème, appliqué à d'autres objets, par exemple un cylindre. Le rayon du cylindre est  $r_0$  lorsqu'il est au repos :



$r$  est le rayon du même cylindre vu par un observateur par rapport auquel le cylindre est animé d'un mouvement de rotation uniforme (de vitesse angulaire  $\omega$ ) autour de son axe<sup>1</sup>, ce qui donne la figure de la page suivante :

<sup>1</sup> On ne peut ignorer ici qu'il ne s'agit pas d'un mouvement rectiligne uniforme, le sujet ne dépend donc pas de la relativité restreinte, mais il doit être étudié selon la relativité générale.



Le cylindre doit obéir à deux exigences contradictoires :

- chaque élément de la circonférence, qui est animé d'une vitesse  $r\omega$  dans sa propre direction, doit subir la contraction de Lorentz ( $2\pi r < 2\pi r_0$ )
- si on mesure le rayon, et non la circonférence, il n'y a pas de contraction, puisque le mouvement est à angle droit.

Par conséquent, vu du système au repos  $S_0$ , un disque ou un cylindre cédera. Il n'en sera rien pour un observateur en repos par rapport à lui. Qu'en est-il ? Cède-t-il ou non ?

Ce paradoxe ne trouvera une description suffisante qu'en 1919, c'est-à-dire après l'avènement de la Relativité générale, mais ce sera au prix de la notion de rigidité : si nous acceptons la conception relativiste de la contraction des longueurs, nous sommes amenés à adopter une nouvelle géométrie (dans un premier temps la géométrie riemannienne), et donc les corps "rigides" n'ont plus la forme immuable qu'ils avaient en géométrie euclidienne. La géométrie du disque, par exemple, doit être revue selon la géométrie riemannienne. Le paradoxe d'Ehrenfest, et surtout sa résolution, se trouve donc étroitement lié à l'avènement de la Relativité générale et l'adoption d'un espace courbe. Il peut donc être approfondi selon de nombreux points.

### 3. Le paradoxe des jumeaux

Le deuxième paradoxe concernant la Relativité que nous nous proposons d'exposer est le paradoxe des jumeaux : c'est souvent par lui que les auteurs ont voulu faire connaître la théorie aux non-spécialistes et au grand public. De nouveau, on en trouve l'origine dès 1905 dans l'article fondateur d'Einstein.

#### 3.1. Einstein en 1905

Cette conséquence surprenante de la théorie est présentée de la manière suivante :

“Si en deux points A et B se trouvent deux horloges au repos, synchrones du point de vue du système au repos, et si l'on déplace l'horloge située en A à la vitesse  $v$  le long de la droite qui joint A et B, alors, lorsque cette horloge arrive en B, les deux horloges ne sont plus synchrones ; celle qui s'est déplacée de A vers B retarde de  $\frac{1}{2}(v/V)^2$  sur celle qui est en B depuis le début (à des quantités d'ordre supérieur ou égal à quatre près) –  $t$  étant ici le temps mis par l'horloge pour aller de A en B”. [E.C.M. p. 42]

#### 3.2. Principe de relativité et dilatation du temps

##### 3.2.1. Formulation d'un paradoxe

De nouveau, nous pouvons remarquer que ce problème n'a pas été exprimé en 1905 par Einstein en termes de paradoxe. Il faut attendre 1911 et la formulation par Langevin pour que l'on emploie véritablement le terme de paradoxe.

Il est le plus souvent connu sous la forme suivante.

Imaginons deux jumeaux dont l'un partirait à travers l'espace pour un voyage à une vitesse élevée, proche de celle de la lumière, son temps serait ralenti par rapport à celui de son frère, resté sur Terre. À son retour, il se trouverait beaucoup plus jeune que son frère et pourrait même (pour un voyage assez long) retrouver les descendants de son frère. Comme dans l'article précédemment cité d'Alphonse Berget, deux ans vécus par le voyageur pourraient correspondre à deux cents ans sur Terre – selon les termes du paradoxe utilisés par Paul Langevin.

On a bien sûr un paradoxe au sens où il nous est difficile d'admettre cet état de choses, du fait de notre expérience quotidienne. Cependant, ce côté spectaculaire a attiré l'attention et permis de soulever un certain

nombre de questions. Entre 1905 et 1998, pas moins de 257 articles ont été écrits sur le sujet. Ce problème a donc été l'occasion de voir se développer un bon nombre de querelles très variées.

On a également un apparent paradoxe si nous appliquons ce que nous disions concernant la contraction des longueurs : les systèmes sont interchangeables. De la même façon que l'on disait que les deux observateurs voyaient la règle appartenant à l'autre système (en mouvement) se raccourcir, chacun des jumeaux peut considérer qu'il est en mouvement et que l'autre est au repos. Chacun reviendra plus jeune que l'autre. Certains auteurs ont cru voir ici une contradiction interne à la théorie.

### 3.2.2. *Bergson*

Tel est le cas d'Henri Bergson, qui répond au problème posé par Langevin de la manière suivante, Paul étant le voyageur, Pierre le sédentaire.

“Dans ces conditions, le Temps de Paul est cent fois plus lent que celui de Pierre. Mais c'est du temps attribué, ce n'est pas du temps vécu. Le temps vécu par Paul serait le temps de Paul référant et non le temps référé : ce serait exactement le temps que vient de trouver Pierre.” [D. S. p. 79]

Par ces mots, Bergson affirme que le temps vécu par Paul serait le même que celui vécu par Pierre. Le voyageur vieillirait donc autant que son frère resté sur terre. Le paradoxe n'a donc pas lieu d'être.

Parmi les propos polémiques qui ont suivi les écrits de Bergson, citons une réponse d'Olivier Costa de Beauregard :

“Que voilà un typique exemple de ces fallacieuses “évidences” où peut tomber un non-physicien, même très éminent dans un autre domaine du savoir.” [N.T.E. p. 67]

### 3.2.3. *Réponse par l'accélération*

Pourquoi les histoires de Pierre et de Paul ne sont-elles pas les mêmes ? Pourquoi ne doit-on pas considérer que chacun des deux systèmes peut être pris comme système de référence immobile ? Qu'est-ce qui les différencie ? Olivier Costa de Beauregard nous apporte la réponse en expliquant que :

“[...] l'un est constamment resté sans accélération tandis que l'autre a subi (idéalement) une accélération infiniment grande en passant de  $v$  à  $-v$ .” [N.T.E. p. 67]

Parce qu'il subit une accélération, celui qui part vieillit moins.

De nombreuses études ont suivi. Le trajet du voyageur a été analysé selon différents découpages, en prenant en compte l'accélération initiale, puis le moment du retour (changement de direction), puis le ralentissement à l'arrivée.

Aujourd'hui, après de nombreux écrits – et des expériences sur des muons, particules accélérées dont on a constaté l'accroissement de longévité – il est admis que l'argument de Bergson ne tient pas et que le paradoxe des jumeaux est un énoncé valable, même s'il doit être traité selon les principes de la relativité restreinte et ceux de la théorie généralisée. Une polémique avait d'ailleurs éclaté sur la question de la validité du traitement par la Relativité restreinte alors qu'on avançait l'argument de la présence d'accélération.

Si chacun accepte maintenant de telles conclusions, certains refusent cependant de parler d'un paradoxe, exactement au même titre que ce qui concerne la contraction des longueurs : nous avons là des effets de perspective. Cet effet de “perspective temporelle” nous est moins facilement concevable que la perspective spatiale, mais elle relève du même raisonnement.

#### 4. Deux paradoxes pour un seul phénomène

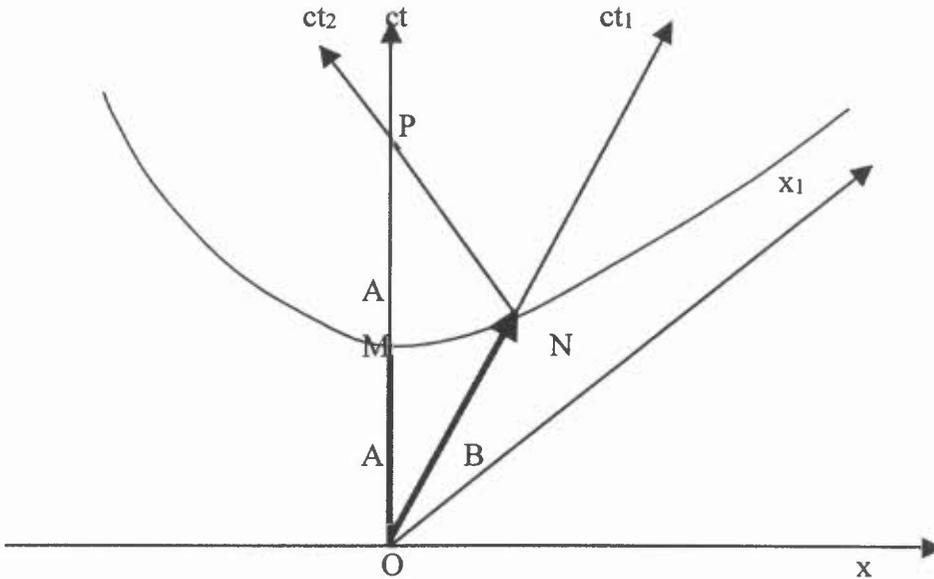
En effet, il s'agit du même raisonnement, de la même logique, appliquée à la dimension spatiale puis à la dimension temporelle. Nous pouvons même affirmer que le paradoxe d'Ehrenfest et le paradoxe des jumeaux ne sont finalement que deux facettes d'un même phénomène puisque l'espace et le temps sont, en Relativité, regroupés en un “continuum d'espace-temps”. Alors qu'en physique classique le temps était considéré comme quelque chose d'indépendant de l'espace et du mouvement, dans la physique relativiste, l'espace et le temps sont étroitement liés et ne représentent que deux différentes sections du continuum spatio-temporel où prennent place tous les phénomènes.

Deux événements séparés dans l'espace par la distance  $l$  et dans le temps par l'intervalle  $t$ , dans un certain système, seront séparés par une autre distance  $l'$  et un autre intervalle de temps  $t'$  dans un autre système. En

revanche, ce qui est constant, c'est l'intervalle espace-temps (à quatre dimensions).

#### 4.1. Représentation par le diagramme de Minkowski

Cette unité apparaît plus clairement lorsqu'on adopte la représentation du diagramme de Minkowski. Ici, on représente les trois dimensions spatiales d'un observateur par un seul axe. La dimension temporelle est représentée sur le même diagramme, par un autre axe. On peut ainsi mieux concevoir le continuum espace-temps. Le diagramme suivant représente le paradoxe des jumeaux.



Les axes d'espace et de temps du jumeau sédentaire sont représentés par  $x$  et  $ct$ , l'axe de temps du jumeau voyageur par  $ct_1$  (trajet aller) et  $ct_2$  (trajet retour).

Pour déterminer les unités de temps dans chaque système propre, on trace l'hyperbole  $c^2t^2 - x^2 = c^2t_1^2 - x_1^2 = 1$ . Son intersection avec les axes de temps détermine les unités correspondantes  $[OM]_{x=0} = 1$  et  $[ON]_{x_1=0} = 1$ .

Si l'on suppose que l'observateur B amorce son retour vers A au bout du temps unité, il atteindra A lorsque le temps  $NP = NO = 1$  sera écoulé. Il aura donc vieilli de deux fois son temps unité. Au moment de la coïncidence avec A, ce dernier aura vieilli, lui, de plus de deux unités de son temps propre.

La différence de vieillissement sera d'autant plus grande que la vitesse du voyageur sera élevée, c'est-à-dire que l'axe  $ct_1$  sera plus incliné et la durée du voyage plus longue ( $0 < ct_1 \leq 45^\circ$ ).

## 5. Conclusion

Les tentatives pour prouver l'incompatibilité du principe de relativité et de la contraction des longueurs et de la dilatation du temps se sont montrées infructueuses. De telles tentatives, mises en avant par les deux énoncés paradoxaux que nous avons vus, visaient à nier la validité de la théorie de la relativité par la mise en valeur d'une incohérence interne : les conséquences de la théorie semblaient contredire une des prémisses de la même théorie (le principe de relativité). Car, si un paradoxe est un énoncé extravagant, extraordinaire, c'est aussi un énoncé qui exprime une contradiction. Cette deuxième signification du terme nous fait comprendre pourquoi tant de paradoxes ont été énoncés dans le cadre de cette théorie : ce sont là autant de tentatives pour démontrer son incohérence.

À ce titre, les deux paradoxes rencontrés sont exemplaires : que resterait-il aux relativistes si les conséquences de la théorie de la relativité étaient effectivement en contradiction avec le principe de même nom, un des piliers fondateurs de la théorie ?

Cependant, l'échec de ces tentatives nous rappelle ce que la théorie de la relativité a de novateur pour la physique, mais aussi pour notre manière plus générale de penser les phénomènes : nous ne devons plus chercher à unifier les différents points de vue en un seul, nous ne pouvons réunir des systèmes de référence différents (en mouvement l'un par rapport à l'autre) en un seul, sans nous trouver face à des difficultés insurmontables.

Par conséquent, nous ne pouvons trancher entre l'un et l'autre en nous demandant lequel des observateurs a une vision exacte, lequel "voit" la réalité, lequel "voit" l'apparence. De plus, à de telles vitesses, l'observateur ne peut pas "voir" les phénomènes tels qu'ils sont, tout au plus peut-il les concevoir.

Ainsi, en choisissant une version simplifiée des premiers paradoxes que l'on rencontre après l'avènement de la théorie de la relativité, nous voyons à quel point cette théorie bouleverse certaines notions et certaines dichotomies philosophiques. Les paradoxes, loin de condamner la théorie, mettent en relief la nouveauté conceptuelle – en même temps que la nouveauté des phénomènes physiques – nécessaire à l'acceptation de la théorie de la relativité.

Centre François Viète, Sylviane.BIDAL@wanadoo.fr

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGET A., "Le ciel", *Le Larousse*, Paris, Larousse, 1923.
- [2] EINSTEIN A., "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", *Annalen der Physik*, vol. 17, 1905, p. 891 – 921 [E.C.M.], trad. fr. de Maurice Solovine : "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement", Gauthier-Villars, 1925, nombreuses rééditions.
- [3] EINSTEIN A., *Œuvres Choisies, Relativités 1*, Paris, Seuil /CNRS, 1993.
- [4] COSTA DE BEAUREGARD O., *La notion de temps. Équivalence avec l'espace*, Paris, Vrin, 1983 (première édition : 1963) [N.T.E.].
- [5] BERGSON H., *Durée et simultanéité*, Paris, PUF, 1968 [D.S.].
- [6] LANGEVIN P., "L'évolution de l'espace et du temps", *Scientia* (Bologna), 10, 1911, p. 31-54 (conférence au Congrès de philosophie de Bologne, 1911).
- [7] TONNELAT M.-A., *Histoire du principe de relativité*, Paris, Flammarion, coll. nouvelle bibliothèque, 1971.